

球と正多面体のあいだの形状を与える数式

尾中 晋

東京工業大学大学院総合理工学研究科

1. はじめに

サイコロ型といえばふつうは立方体型の意味ですが，大きな文具店には立方体以外の形のサイコロがたくさん並べられています．それらのなかでも正多面体型が気に入り，先日，散歩のついでにひと揃い買ってきました．家に帰って早速振ってみると，正四面体型だけは頂点が真上になります．“目”は正三角形の面のすみに彫ってあり，ほかのサイコロとは様子がだいぶ違ってきます．

2. 微粒子の形状

正多面体型サイコロの形状は，図1に示すプラトン立体とも呼ばれる五種類の凸型正多面体[1]を倣ったものです．私の専門分野の材料科学では結晶の構造や結晶性微粒子の形状を扱うことがあり，その際にも正多面体がしばしば登場します．しかし，正多面体型サイコロの形もそうであるように，何であれ実在の物質の実際の形と概念としての多面体は別のものであります．例えば金属材料の内部に析出する微粒子は，その形状がおおむ

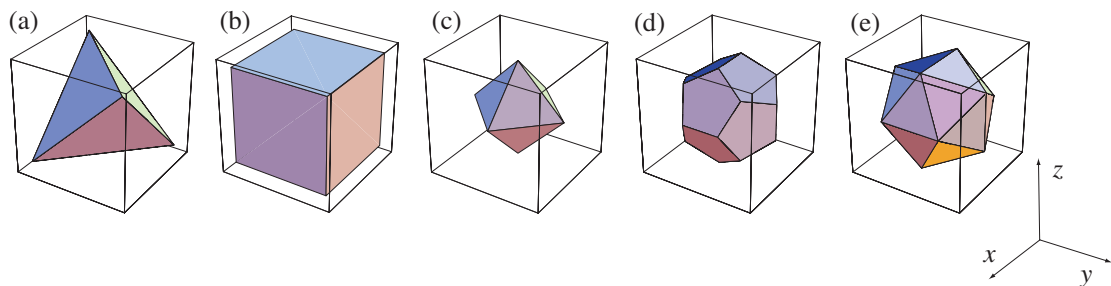


図1 プラトン立体として知られる五種類の正多面体：(a) 正四面体，(b) 正六面体，(c) 正八面体，(d) 正十二面体，(e) 正二十面体およびそれらの形状を記述するために使う  $x$ - $y$ - $z$  直交座標系．

ね多面体状であっても多くの場合に稜は丸みをおびています. 図2の電子顕微鏡写真はその特徴がはっきりと現れている例で, 2個の微粒子は球と立方体のあいだのような形を持っています[2,3].

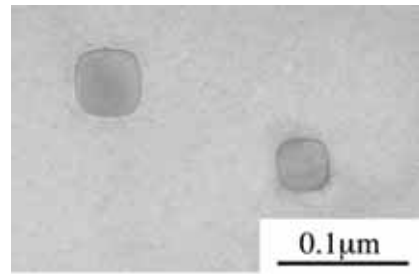


図2 Cu母相中に析出したCo-Cr合金粒子の電子顕微鏡写真[2].

含まれている微粒子の形が材料全体の性質に影響を及ぼすこともあるため, 微粒子形状は何によって決まっているのか, どうすれば微粒子形状を変化させることができるか, といったことも材料科学では考えます. 図2に示されている合金では, 粒子の大きさの増大も球に近い形から立方体に近い形への形状変化をもたらします[2,3]. 界面エネルギーや弾性ひずみエネルギーなどを考えるエネルギー論によって, このような粒子の形状変化を物理的に説明しようとしています. そのとき, 球と多面体のあいだの形を記述する簡単な形式の数式があると, 形状変化の本質が理解しやすくなるのでは, と考えています[3]. 本稿では, 主として正多面体を例にして, このような数式について述べようと思います.

### 3. 正多面体

#### 3-1 立方体

$x-y-z$ 直交座標系のもと, 次の式を考えます.

$$|x|^p + |y|^p + |z|^p = 1 \quad (p \geq 2) \quad (1)$$

式(1)は, 指数  $p$  が  $p=2$  のときに球を,  $p \rightarrow \infty$  のときに図1(b)の立方体(正六面体)を与える式となります[4].  $p$  の値が2から増加する場合, 式(1)が与える形状の変化を図3(a)から(c)に, それらの形状の  $y-z$  面における断面を図3(d)に示します. これらの図

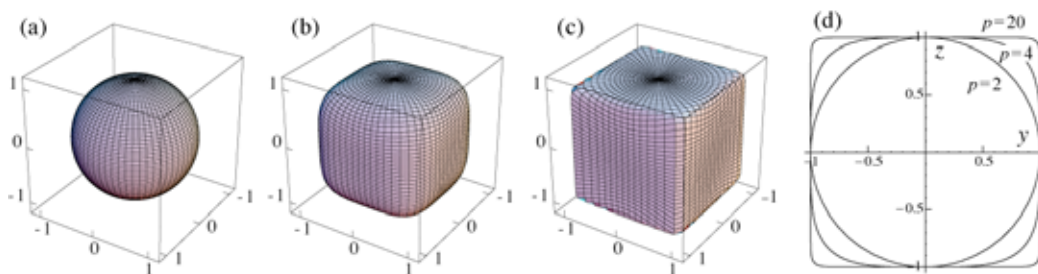


図3 式(1)によって表される形状: (a)  $p=2$ , (b)  $p=4$ , (c)  $p=20$  および (d) それらの断面形状.

からわかるように、 $p$ の値が20程度より大きくなるとその形状は立方体にかなり近いものとなります。図2に示されている微粒子の形状は $p$ の値が3から4程度のときの形状でうまく近似することができます[2,3]。また、式(1)を二次元版とし、さらにそれを円-正方形用から楕円-長方形用に変形した式は、ストックホルム中心部の周回道路の形状を決める際に使われたそうです[5]。

$|x| > |y|, |z|$  ならば、 $p \rightarrow \infty$ のとき $|x|^p + |y|^p + |z|^p = 1$ は $|x| = 1$ を意味します。これが $p \rightarrow \infty$ のときに式(1)が、 $x = \pm 1, y = \pm 1$ そして $z = \pm 1$ という3組の互いに平行な面で囲まれた立方体の形状を与える理由です。

ここで、ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ が $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満足する単位ベクトルであるとします。このとき平面 $ax + by + cz = 1$ は、 $\mathbf{a}$ を法線ベクトルとし原点からこの平面へ下した垂線の足が座標 $(a, b, c)$ となる平面です。また、 $f(a, b, c)$ を

$$f(a, b, c) = ax + by + cz, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (2)$$

の意味であるとする、式(1)は

$$|f(1, 0, 0)|^p + |f(0, 1, 0)|^p + |f(0, 0, 1)|^p = 1 \quad (3)$$

と書き直せます。つまり、3組の互いに平行な面、

$$|f(1, 0, 0)| = 1, \quad |f(0, 1, 0)| = 1 \text{ そして } |f(0, 0, 1)| = 1 \quad (4)$$

で囲まれている立方体の形状は、式(3)の $p \rightarrow \infty$ のときとして記述できるわけです。

さらに $(x, y, z)$ 直交座標による表現、式(1)を $(r, \theta, \varphi)$ 球座標によって書き直します。これらの二つの座標のあいだの関係は

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \quad (5)$$

なので,  $g(a, b, c)$ を

$$g(a, b, c) = a(\sin \theta \cos \varphi) + b(\sin \theta \sin \varphi) + c(\cos \theta) \quad (6)$$

の意味であるとする,  $p \rightarrow \infty$ のときに立方体の形状を表現する数式として, 式(1)より以下を得ることができます.

$$r_{\text{hex}} = \frac{1}{[G_0(1,0,0)]^{1/p}}, \quad (7)$$

$$G_0(1,0,0) = |g(1,0,0)|^p + |g(0,1,0)|^p + |g(0,0,1)|^p.$$

以下, 本稿では立方体以外の正多面体, その他の凸型多面体を扱いますが, それらの形状は式(7)と同じように球座標を使って表されることになります.

### 3-2 正八面体, 正十二面体, 正二十面体

正八面体, 正十二面体そして正二十面体は, 立方体と同じように「互いに平行な面の組み」によって多面体が構成されています. それらの「互いに平行な面の組み」は, 図1に示す正多面体と座標系との相対関係のもとで, 式(2)を使って以下のように書くことができます.

正八面体 (4組の互いに平行な面):

$$|f(\gamma, \gamma, \gamma)| = 1, |f(-\gamma, \gamma, \gamma)| = 1, |f(\gamma, -\gamma, \gamma)| = 1, |f(\gamma, \gamma, -\gamma)| = 1. \quad (\gamma = 1/\sqrt{3}) \quad (8)$$

正十二面体 (6組の互いに平行な面):

$$|f(\delta, \varepsilon, 0)| = 1, |f(\delta, -\varepsilon, 0)| = 1, |f(0, \delta, \varepsilon)| = 1, |f(0, \delta, -\varepsilon)| = 1, |f(\varepsilon, 0, \delta)| = 1, |f(\varepsilon, 0, -\delta)| = 1$$

$$(\delta = \sqrt{(5 - \sqrt{5})/10}, \varepsilon = \sqrt{(5 + \sqrt{5})/10}) \quad (9)$$

正二十面体 (10 組の互いに平行な面) :

$$|f(\gamma, \gamma, \gamma)| = 1, |f(-\gamma, \gamma, \gamma)| = 1, |f(\gamma, -\gamma, \gamma)| = 1, |f(\gamma, \gamma, -\gamma)| = 1 \quad (10)$$

そして

$$|f(\zeta, \eta, 0)| = 1, |f(\zeta, -\eta, 0)| = 1, |f(0, \zeta, \eta)| = 1, |f(0, \zeta, -\eta)| = 1, |f(\eta, 0, \zeta)| = 1, |f(\eta, 0, -\zeta)| = 1$$

$$(\zeta = \sqrt{(3 - \sqrt{5})/6}, \eta = \sqrt{(3 + \sqrt{5})/6}) \quad (11)$$

正八面体についての式(8)と正二十面体についての式(10)は同一で、正十二面体についての式(9)と正二十面体についての式(11)は、含まれている係数  $(\delta, \varepsilon)$  と  $(\zeta, \eta)$  は異なっていますが同一の形式になっています. 式(8)の  $\gamma = 1/\sqrt{3}$  と比較し、式(9)の係数  $(\delta, \varepsilon)$  と式(11)の係数  $(\zeta, \eta)$  の値は直感的にはわかりにくいのですが、正十二面体と正二十面体、それぞれの多面体を構成する面のあいだの関係から決めることができます.

立方体の場合における式(4), (6)そして(7)の関係から類推できるように、 $p \rightarrow \infty$  のときに正八面体、正十二面体、そして正二十面体を与える数式は、それぞれ、式(8)から(11)より以下のように求めることができます.

正八面体 :

$$r_{\text{octa}} = \frac{1}{[G_1(\gamma, \gamma, \gamma)]^{1/p}}, \quad (12)$$

ここで

$$G_1(\gamma, \gamma, \gamma) = |g(\gamma, \gamma, \gamma)|^p + |g(-\gamma, \gamma, \gamma)|^p + |g(\gamma, -\gamma, \gamma)|^p + |g(\gamma, \gamma, -\gamma)|^p.$$

正十二面体：

$$r_{\text{dodeca}} = \frac{1}{[G_{\text{II}}(\delta, \varepsilon, 0)]^{1/p}}, \quad (13)$$

ここで

$$G_{\text{II}}(\delta, \varepsilon, 0) = |g(\delta, \varepsilon, 0)|^p + |g(\delta, -\varepsilon, 0)|^p + |g(0, \delta, \varepsilon)|^p + |g(0, \delta, -\varepsilon)|^p + |g(\varepsilon, 0, \delta)|^p + |g(\varepsilon, 0, -\delta)|^p.$$

正二十面体：

$$r_{\text{icosa}} = \frac{1}{[G_{\text{I}}(\gamma, \gamma, \gamma) + G_{\text{II}}(\zeta, \eta, 0)]^{1/p}}. \quad (14)$$

図4 (a), (b)そして(c)は,  $p = 40$ のときに式(12) (正八面体), 式(13) (正十二面体) そして式(14) (正二十面体) が与える図形の形状です. 立方体のときと同じように, 式(12), (13)そして(14)によって示される形状は  $p$ の値の2からの増加に伴い球から正多面体へと変化します.

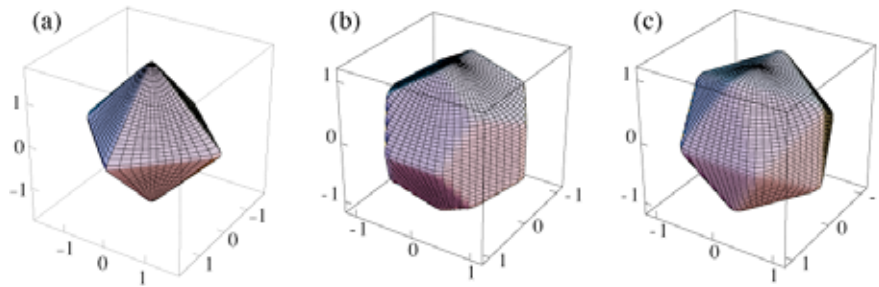


図4 式(12)から(14)が  $p=40$  のときに与える (a)正八面体状形状, (b)正十二面体状形状, および(c)正二十面体状形状.

### 3-3 正四面体

正多面体の最後は正四面体です. 他の正多面体と異なり, 正四面体は互いに平行な面を持ちません. よって, これまでとは多少異なった扱いが必要になります. 先ず, 式(6)の  $g(a, b, c)$  を使って, 以下のような関数  $h(a, b, c)$ ,

$$h(a,b,c) = \{|g(a,b,c)| - g(a,b,c)\} / 2 \quad (15)$$

を作ります. この  $h(a,b,c)$  は,  $g(a,b,c) \geq 0$  のときに  $h(a,b,c) = 0$ , そして  $g(a,b,c) < 0$  のときに  $h(a,b,c) = -g(a,b,c)$  となります.  $g(a,b,c)$  のかわりにこの  $h(a,b,c)$  を使うと, 正八面体を構成する互いに平行な面の一方を取り除き, 正四面体を与える数式を得ることができます. つまり,

$$r_{\text{tetra-1}} = \frac{1}{[H(\gamma,\gamma,\gamma)]^{1/p}}, \quad (16)$$

$$H(\gamma,\gamma,\gamma) = \{h(\gamma,\gamma,\gamma)\}^p + \{h(\gamma,-\gamma,-\gamma)\}^p + \{h(-\gamma,\gamma,-\gamma)\}^p + \{h(-\gamma,-\gamma,\gamma)\}^p,$$

とすれば, これが  $p \rightarrow \infty$  のときに正四面体を与える数式です.

しかし, 式(16)は  $p = 2$  のときにも球とはなりません. そこで,

$$r_{\text{tetra-2}} = \frac{1}{[H(\gamma,\gamma,\gamma) + (1/p)^{(p-2)} H(-\gamma,-\gamma,-\gamma)]^{1/p}} \quad (17)$$

とします. すると, 式(17)は, 式(16)と同じく  $p \rightarrow \infty$  のときに正四面体を与える関数であると同時に,  $p = 2$  のときに一定の  $r$  (球) を与える関数となります. 式(17)が与える形状の  $p$  の値の 2 からの増加に伴う変化は図 5 に示しました.

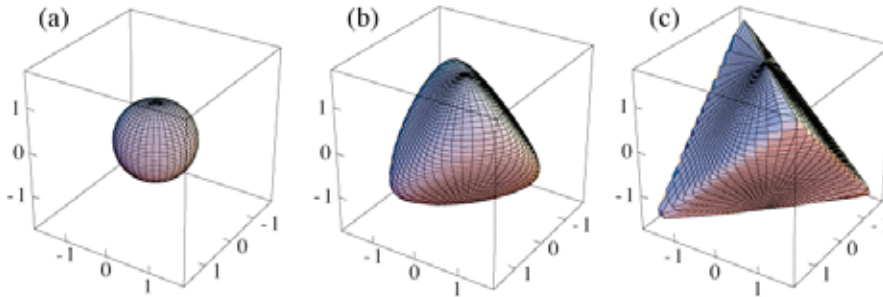


図 5 式(20)によって表される形状:(a)  $p=2$ , (b)  $p=4$ , (c)  $p=16$ .

#### 4. その他の凸型多面体

正多面体以外の凸型多面体も前章と同じような数式で記述することができます. ここに示す例は, 式(13)に含まれる係数を $(\kappa, \kappa, 0)$ の形式 ( $\kappa = 1/\sqrt{2}$ ) に変えた $G_{II}(\kappa, \kappa, 0)$ を含む以下の数式です.

$$r = \frac{1}{\left[ G_0(1,0,0) + (\sqrt{3} \alpha)^p G_I(\gamma, \gamma, \gamma) + (\sqrt{2} \beta)^p G_{II}(\kappa, \kappa, 0) \right]^{1/p}} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0) \quad (18)$$

この式は $p = 2$ のときは右辺の係数 $\alpha$ と $\beta$ の値によらず球を与えますが,  $p \rightarrow \infty$ のときは, 係数 $\alpha$ と $\beta$ の値によって, 正六面体, 正八面体, 菱形十二面体そしてそれらを組み合わせたような多面体形状を与えます. この係数 $\alpha$ と $\beta$ の値の変化に伴う形状変化は, 図6の図中に示されている多面体形状の遷移としてまとめることができます[6]. つまり,  $\alpha \leq 1/3$ かつ $\beta \leq 1/2$ の領域は正六面体,  $1 \leq \beta$ かつ $3\alpha/2 \leq \beta$ の領域は菱形十二面体, そして $1 \leq \alpha$ かつ $\beta \leq \alpha$ の領域は正八面体に対応し, それらのあいだの領域では「切頭」[1] (もしくは「切頂」[7]) された多面体として形状が変化します. また,  $\alpha = 1/(2\sqrt{2}-1) \approx 0.55$ ,

そして $\beta = 1/\sqrt{2} \approx 0.71$ に対応する多面体は 18 個の正方形の面と八つの正三角形の面で構成される二十六面体で, 斜立方八面体[1] (あるいは菱形立方八面体[7]) と呼ばれます.

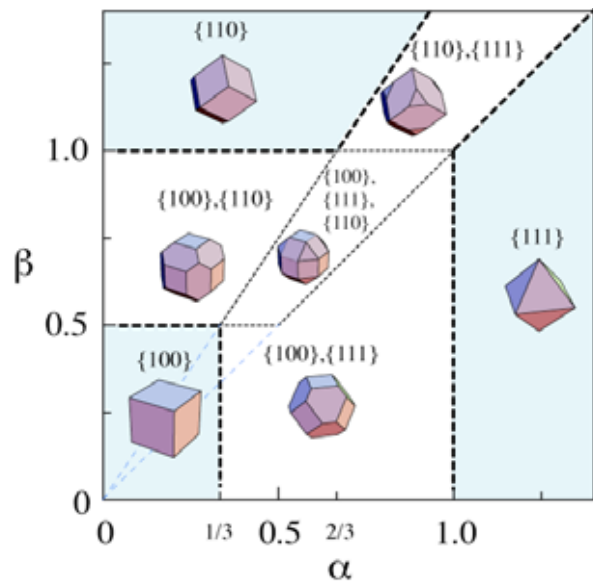


図6 式(18)が $p \rightarrow \infty$ のときに与える多面体形状の $\alpha$ と $\beta$ の変化に伴う変化.

立方晶構造を持つ結晶における多面体形状を考えると, 図6に示されている正六面体, 菱形十二面体そして正八面体の表面は, それぞれ, 結晶学における表現で $\{100\}$ ,  $\{110\}$ ,  $\{111\}$ という低指数の結晶面とみなせます. このような低指数の結晶面およびそれらの



組み合わせで構成される多面体状の形状は、微粒子の形としてしばしば観察されています[8]。図2に示した合金でも、微粒子とその周りの金属はともに立方晶構造を持っており、微粒子の形状は{100}で囲まれた立方体と球とのあいだになっています[3]。

## 5. おわりに

丸いものと角張ったもののあいだの形状はいろいろあると思います。東京ドームの平面形も円と正方形のあいだの形状で、式(1)の二次元版で記述できる形だそうです[7]。インターネットで東京ドームの航空写真を見てみると、それが図2の微粒子の断面形状にそっくりなことに気づきます。図2の微粒子はその構造である四角い立方晶を包むもので、東京ドームは言うまでもなく四角いダイヤモンドを持つ野球場を包む建造物です。四角いものを効率よく包もうとすると丸と四角のあいだになるのでしょうか。東京ドームはこの微粒子に比べて $10^9$ 倍以上も大きいのですが、これらの形状の類似性も面白いと思っています。

## 参考文献

- [1] 「多面体」, P.R. クロムウェル, 下川航也ら訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001.
- [2] T. Fujii, T. Tamura, M. Kato and S. Onaka, *Size-dependent equilibrium shape of Co-Cr particles in Cu*, *Microscopy and Microanalysis*, **8**(supplement 2), 1434-1435, 2002.
- [3] S. Onaka, N. Kobayashi, T. Fujii and M. Kato, *Energy analysis with a superspherical shape approximation on the spherical to cubical shape transitions of coherent precipitates in materials with cubic structures*, *Mat. Sci. Eng. A*, **A347**, 42-49, 2003.
- [4] A. Jaklic, A. Leonardis and F. Solina, *Segmentation and recovery of superquadrics* (Computational Imaging and Vision, Vol. 20), Kluwer Academic, Dordrecht, pp.13-39, 2000.
- [5] M. Gardner, *Scientific American*, 222-232, September, 1965.
- [6] S. Onaka, *Simple equations giving shapes of various convex polyhedra: the regular polyhedra and polyhedra composed of crystallographically low-index planes*. *Phil. Mag. Lett.*,

86, 175-183, 2006.

[7] 「かたちのパノラマ」, 宮崎興二, 丸善, 2003.

[8] 「表面・微粒子」, 木下是雄責任編集, 実験物理学講座, 東京・共立出版, 1986.

[おなか すすむ]